EXERCICE 1 **5 points**
Commun à tous les candidats

Un magasin vend des moteurs électriques tous identiques. Une étude statistique du service après-vente a permis d'établir que la probabilité qu'un moteur tombe en panne pendant la première année d'utilisation est égale à $0,12$.
Tous les résultats seront arrondis à 10^{-3}

Partie A

Une entreprise achète 20 moteurs électriques dans ce magasin.
On admet que le nombre de moteurs vendus dans ce magasin est suffisamment important pour que l'achat de 20 moteurs soit assimilé à 20 tirages indépendants avec remise.

1. Quelle est la probabilité que deux moteurs exactement tombent en panne durant la première année d'utilisation ?
2. Quelle est la probabilité qu'au moins un des moteurs tombe en panne au cours de la première année d'utilisation ?

Partie B

On admet que la durée de vie sans panne, exprimée en années, de chaque moteur est une variable aléatoire Y qui suit une loi exponentielle de paramètre λ où λ, est un réel strictement positif.
On rappelle que pour tout réel positif t, $p(Y \leqslant t) = \displaystyle\int_0^t \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.

Dans les questions 1, 2, 3, les résultats seront arrondis à 10^{-3}.

1. Exprimer $p(Y \leqslant 1)$ en fonction de λ. En déduire la valeur de λ.
   Pour la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0,128$.
2. Quelle est la probabilité qu'un moteur dure plus de 3 ans ?
3. Quelle est la probabilité qu'un moteur dure plus de 4 ans sachant qu'il a duré plus d'un an ?
4. On admet que la durée de vie moyenne d_m de ces moteurs est égale à $\displaystyle\lim_{t \to +\infty} F(t)$ où F est la fonction définie sur l'intervalle $[0\,;\,+\infty[$ par $F(t) = \displaystyle\int_0^t \lambda x \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x$.
   a. Calculer $F(t)$ en fonction de t.
   b. En déduire la valeur de d_m. On arrondira à 10^{-1}.

EXERCICE 2 **6 points**
Commun à tous les candidats

Partie A - Étude du signe d'une fonction

On désigne par f la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$f(x) = x^2 + 4\ln x.$$

1. Déterminer le tableau de variation de la fonction f en précisant les limites de f en 0 et en $+\infty$.
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une solution α et une seule dans l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$.
3. En déduire le signe de $f(x)$ selon les valeurs du réel strictement positif x.

Partie B - Une valeur approchée du réel α défini dans la partie A

Sur le graphique fourni ci-dessous, on a tracé une partie de la courbe représentative $(\mathscr{C})$ de la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$g(x) = \mathrm{e}^{-\frac{1}{4}x^2}$$

On définit la suite (u_n) par :

$$\left\{\begin{array}{lcl} u_0 & = & 0,5 \\ u_{n+1} & = & g(u_n) \quad \text{pour tout } n \in \mathbb{N}. \end{array}\right.$$

1. Vérifier que α est l'unique solution de l'équation $g(x) = x$.

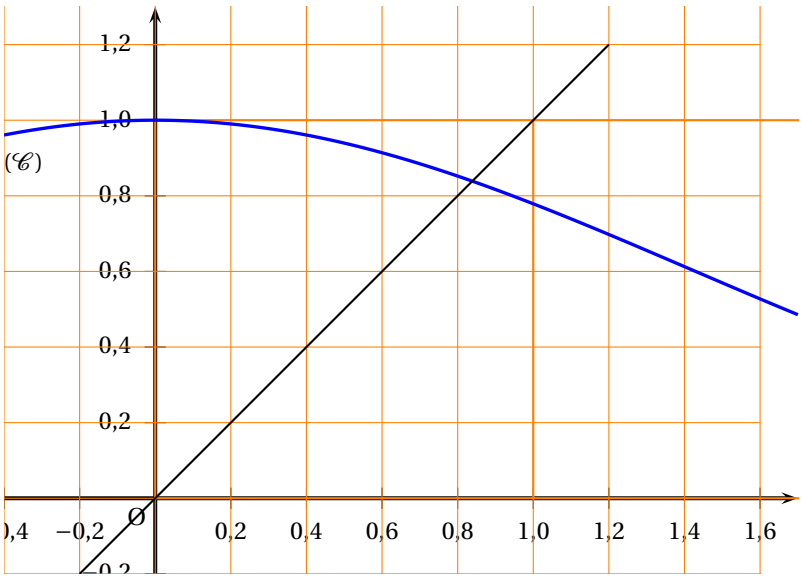
2. Au moyen de la courbe $(\mathscr{C})$ et de la droite d'équation $y = x$, représenter les termes u_1, u_2 et u_3 de la suite (u_n) sur l'axe des abscisses.

Quelle conjecture peut-on faire sur la convergence de la suite (u_n) ?

3. On admet que pour tout entier naturel n, $\quad u_{2n} \leqslant \alpha \leqslant u_{2n+1}$.

En utilisant la calculatrice, déterminer le plus petit entier n pour lequel les trois premières décimales de u_n et u_{n+1} sont identiques.

En déduire que $0,838$ est une valeur approchée de α à 10^{-3} près.



Partie C - Un problème de distance

On appelle (Γ) la courbe représentative, dans un repère orthonormal, de la fonction φ définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$\varphi(x) = 2\ln x.$$

L'objectif de cette partie est de démontrer que parmi les points de la courbe (Γ), il y en a un et un seul qui est plus proche de l'origine O que tous les autres.

1. Soient M un point de la courbe (Γ) et x son abscisse. Exprimer $\mathrm{O}M$ en fonction de x.

2. **a.** Soit h la fonction définie sur l'intervalle $]0\,;\,+\infty[$ par

$$h(x) = x^2 + 4(\ln x)^2.$$

Étudier les variations de la fonction h. On pourra utiliser la partie A.

b. En déduire qu'il existe un unique point A de la courbe (Γ) tel que pour tout point M de (Γ), distinct de A, on ait $\mathrm{O}M > \mathrm{OA}$.

3. Démontrer que la droite (OA) est perpendiculaire à la tangente T_A à la courbe (Γ) au point A.

EXERCICE 3 **4 points**

Commun à tous les candidats

L'espace est muni d'un repère orthonormal $\left(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k}\right)$.

Partie A - Restitution organisée de connaissances

On désigne par a, b, c, d quatre réels tels que le vecteur $\vec{n} = a\vec{\imath} + b\vec{\jmath} + c\vec{k}$ soit différent du vecteur nul.
On appelle P le plan d'équation $ax + by + cz + d = 0$.
Démontrer que le vecteur $\vec{n}$ est un vecteur normal au plan P, c'est-à-dire que le vecteur $\vec{n}$ est orthogonal à tout vecteur $\overrightarrow{AB}$ où A et B sont deux points quelconques du plan P.

Partie B - Questionnaire à choix multiples

Pour chaque question, trois réponses sont proposées, une seule est exacte. Le candidat portera sur la copie le numéro de la question suivi de la lettre correspondant à la réponse choisie ainsi que la justification de ce choix.
Il est attribué 1 *point si la réponse est exacte et justifiée. Une réponse non justifiée ne rapporte aucun point. Aucun point n'est enlevé en l'absence de réponse ou en cas de réponse fausse.*

On désigne par P le plan d'équation cartésienne $2x - y + 3z = 0$ et par A et B les deux points du plan P de coordonnées respectives $(1 ; 2 ; 0)$ et $(0 ; 3 ; 1)$.

1. Soient C, D, E les points de coordonnées respectives $(1 ; 1 ; -1)$, $(-1 ; 4 ; 2)$, $(1 ; 5 ; 1)$.

a. Les points A, B, C définissent le plan P.

b. Les points A, B, D définissent le plan P.

c. Les points A, B, E définissent le plan P.

2. La droite D est définie par la représentation paramétrique : $\left\{\begin{array}{lcr} x & = & 1-t \\ y & = & t, \\ z & = & 2+t \end{array}\right.$ $t \in \mathbb{R}$.

a. La droite D est perpendiculaire au plan P.

b. La droite D est strictement parallèle au plan P.

c. La droite D est incluse dans le plan P.

3. Soit S la sphère de centre Ω, de coordonnées $(2 ; 5 ; 1)$, et de rayon $\dfrac{1}{2}$. L'ensemble des points communs à la sphère S et au plan P est :

a. vide,

b. constitué d'un seul point,

c. un cercle.

EXERCICE 4 **5 points**

Enseignement obligatoire

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
On désigne par A le point d'affixe i et par f l'application du plan dans lui-même qui à tout point M d'affixe z, distincte de i, associe le point M' d'affixe z' telle que :

$$z' = \frac{z - \mathrm{i}}{\overline{z} + \mathrm{i}}.$$

1. Calculer l'affixe du point B′, image du point B d'affixe $2 - \mathrm{i}$ par l'application f.
Placer les points B et B′ sur une figure que l'on fera sur la copie.

2. Démontrer que l'application f n'admet pas de point invariant. On rappelle qu'un point invariant est un point confondu avec son image.

3. **a.** Vérifier que, pour tout nombre complexe z, $\overline{z-\text{i}} = \overline{z}+\text{i}$.

   b. Démontrer que $\text{O}M' = 1$ et interpréter géométriquement ce résultat.

   c. Démontrer que pour tout point M distinct de A,

$$\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{\text{O}M'}\right) = 2\left(\overrightarrow{u}\ ;\ \overrightarrow{\text{A}M}\right) + 2k\pi \text{ où } k \text{ est un entier relatif.}$$

   d. En déduire une méthode de construction de l'image M' d'un point quelconque M distinct de A.

4. Soit (d) la droite passant par le point A et dont un vecteur directeur est le vecteur $\overrightarrow{w}$ d'affixe $\text{e}^{\text{i}\frac{\pi}{6}}$.

   a. Dessiner la droite (d).

   b. Déterminer l'image par l'application f de la droite (d) privée du point A.

EXERCICE 4 **5 points**

Enseignement de spécialité

Le plan est muni d'un repère orthonormal $\left(\text{O},\ \overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}\right)$.

On note A et B les points de coordonnées respectives $(1\ ;\ 0)$ et $(6\ ;\ 1)$.

Pour tout point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$, on note M' l'image du point M par la symétrie orthogonale d'axe (AB) et $\left(x'\ ;\ y'\right)$ ses coordonnées.

1. **a.** Justifier l'existence de deux nombres complexes a et b tels que, pour tout point M d'affixe z, l'affixe z' du point M' est donnée par

$$z' = a\overline{z} + b.$$

   b. En utilisant les points A et B, démontrer que $\left\{\begin{array}{lcl} 1 & = & a+b \\ 6+\text{i} & = & a(6-\text{i})+b \end{array}\right.$

   c. En déduire que, pour tout nombre complexe z :

$$z' = \frac{1}{13}(12+5\text{i})\overline{z} + \frac{1}{13}(1-5\text{i}).$$

   d. Établir que, pour tout point M de coordonnées $(x\ ;\ y)$, les coordonnées $\left(x'\ ;\ y'\right)$ du point M' sont telles que :

$$x' = \frac{1}{13}(12x+5y+1) \quad \text{et} \quad y' = \frac{1}{13}(5x-12y-5).$$

2. On désigne par $\mathscr{E}$ l'ensemble des points M dont les coordonnées $(x\ ;\ y)$ sont des entiers relatifs et tels que le point M' associé appartienne à l'axe des abscisses.

   a. Justifier que $M(x\ ;\ y)$ appartient à $\mathscr{E}$ si et seulement si $5(x-1) = 12y$.

   b. En déduire que $\mathscr{E}$ est l'ensemble des points de coordonnées $(1+12k\ ;\ 5k)$ où k est un entier relatif.

3. Dans cette question, on suppose que les coordonnées de M sont des entiers relatifs et que l'abscisse de M' est un entier relatif.

   a. Démontrer que $x \equiv 5y+1 \quad [13]$.

   b. En déduire que $5x-12y-5 \equiv 0 \quad [13]$ et que l'ordonnée de M' est un entier relatif.

4. *Dans cette question, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.*

   Déterminer les points M de la droite d'équation $x = 2$ tels que les coordonnées du point M' soient des entiers relatifs.

   On pourra montrer que l'ordonnée y d'un tel point est un entier relatif et utiliser des congruences modulo 13.